CALCUL DES PROPOSITIONS
EXERCICES SUPLÉMENTAIRES 1

SOLUTIONS

1. Faites la table de vérité de chacune des formules suivantes et dites si c'est une tautologie, une contradiction ou une formule contingente[1].

a) $(r \equiv q) \vee (\neg r \equiv q)$

Tautologie

q	r	$\neg r$	$r \equiv q$	$\neg r \equiv q$	$\mathbf{(r \equiv q) \vee (\neg r \equiv q)}$
V	V	F	V	F	**V**
V	F	V	F	V	**V**
F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	F	**V**

b) $(r \supset q) \equiv (\neg r \vee q)$

Tautologie

q	r	$\neg r$	$r \supset q$	$\neg r \vee q$	$\mathbf{(r \supset q) \equiv (\neg r \vee q)}$
V	V	F	V	V	**V**
V	F	V	V	V	**V**
F	V	F	F	F	**V**
F	F	V	V	V	**V**

[1] Rappelons qu'une formule contingente est une formule qui n'est pas une tautologie ni une contradiction. C'est donc une formule dont au moins une ligne de sa table de vérité a la valeur F et au moins une autre ligne de sa table a la valeur V.

c) $r \supset (p \supset ((r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)))$

Tautologie. (Longue à faire celle-là mais en y regardant bien, c'est intuitif !)

p	q	r	$\neg q$	$r \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$(r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$	$p \supset ((r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$	$\boldsymbol{r \supset (p \supset ((r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)))}$
V	V	V	F	V	F	V	V	**V**
V	V	F	F	F	F	F	F	**V**
V	F	V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	F	V	V	**V**
F	V	F	F	F	F	F	V	**V**
F	F	V	V	F	F	F	V	**V**
F	F	F	V	F	F	F	V	**V**

d) $\neg(p \supset (r \supset p))$

Contradiction. (On s'en doutait puisque $p \supset (r \supset p)$ est une tautologie!)

p	r	$r \supset p$	$p \supset (r \supset p))$	$\boldsymbol{\neg(p \supset (r \supset p))}$
V	V	V	V	**F**
V	F	V	V	**F**
F	V	F	V	**F**
F	F	V	V	**F**

e) $(r \equiv q) \supset (\neg r \supset q)$

Formule contingente : elle est vraie sauf quand q et r sont fausses.

q	r	$\neg r$	$r \equiv q$	$\neg r \supset q$	$\boldsymbol{(r \equiv q) \supset (\neg r \supset q)}$
V	V	F	V	V	**V**
V	F	V	F	V	**V**
F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	F	**F**

2. Trouvez une formule qui ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\supset$ et qui a la même table de vérité que :

a) $p \vee q$ $\neg p \supset q$

Preuve

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \supset q$
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**V**	**V**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**F**	**F**

b) $p \wedge q$ $\neg(p \supset \neg q)$

Preuve

p	q	$\neg q$	$p \supset \neg q$	$\neg(p \supset \neg q)$	$p \wedge q$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	V	V	**F**	**F**
F	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	**F**	**F**

c) $p \equiv q$ $\neg((p \supset q) \supset \neg(q \supset p))$

Preuve

p	q	$p \supset q$	$q \supset p$	$\neg(q \supset p)$	$(p \supset q) \supset \neg(q \supset p)$	$\neg((p \supset q) \supset \neg(q \supset p))$	$p \equiv q$
V	V	V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	V	V	**F**	**F**
F	F	V	V	F	F	**V**	**V**

N.B. : L'ensemble des connecteurs $\neg$ et $\supset$ est *vérifonctionnellement complet* au sens où il permet de définir tous les connecteurs binaires possibles. Il en va de même pour l'ensemble des connecteurs $\neg$ et $\wedge$, et l'ensemble des connecteurs $\neg$ et $\vee$.